

# 利用边界元法求解脑电正问题和高分辨脑电\*

王远乔 袁建生

清华大学电机工程与应用电子技术系, 电工新技术研究所, 北京 100084

**摘要** 利用边界元法求解脑电正问题和高分辨脑电, 分析了边界元法计算带有高电阻率颅骨区域脑电正问题存在的缺陷, 给出了解决该问题以及提高计算精度的方法. 利用边界元所给出的场域边界和分界面上场量的约束关系, 实现了一种由头皮电位推算皮层电位的高分辨脑电计算方法. 通过多层球模型的仿真计算与实际解析解进行比较, 验证了所提出的方法在一定条件下能够取得较高的计算准确度.

**关键词** 脑电 边界元法 脑电正问题 高分辨脑电

脑电正问题是指已知源的分布以及头模型的几何结构和媒质参数, 求解头皮电位. 脑电逆问题是指从头皮测得的电位去反推脑电活动源的位置和大小. 高分辨脑电则是近年来脑电逆问题研究中的一个热门领域. 它是指已知头皮表面的电位去推算皮层表面的电位分布. 目前求解正问题常用的数值方法有: 有限元法(FEM)、边界元法(BEM)、有限体积法(FVM)、矩量法等. 高分辨脑电的计算方法有解析法、FEM、皮层成像技术(CIT)<sup>[1]</sup>、表面Laplacian方法<sup>[2]</sup>等. 上述提到的各种方法, 在解决脑电正、逆问题时都需要涉及三维区域问题, 而边界元法直接求解包围场域边界上的电位以及电位法向导数, 因此可以将三维区域问题降为表面问题, 这是边界元法的主要优点, 它可以大大简化网格剖分和求解过程; 同时由于边界元在求解过程中, 电位法向导数作为方程组的未知量求解, 而不需要根据电位分布进行差分, 这在很大程度上提高了电位法向导数的计算精确度. 但边界元法在计算相邻子区的电阻率剧烈跳变或相差很大的问题时, 会产生较大的计算误差, 该误差主要是因为此时系数矩阵的性质较差, 利用一般的求解器不易得到方程组的准确解.

## 1 算法

### 1.1 边界元法(BEM)

基于 Green 第二定理  $\int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) d\Omega = \oint_{\Gamma} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\Gamma$  可以得到三维静电场的边界积分方程

$$\varphi(M_0) = c \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{4\pi\epsilon r_S} d\Omega + c \iint_{\Gamma} \varphi(M) \frac{1}{4\pi r^2} \cos\theta d\Gamma + c \iint_{\Gamma} \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} d\Gamma, \quad (1)$$

其中  $c = \begin{cases} 0, & M_0 \notin \Omega \\ 1, & M_0 \in \Omega, \Gamma \text{ 是场域 } \Omega \text{ 的边界, } M_0 \text{ 是} \\ 2, & M_0 \in \Gamma \end{cases}$

位于区域中或边界上的场点,  $M$  为边界点,  $\varphi$  为电位,  $\epsilon$  为介质的电容率,  $\rho$  为电荷体密度,  $r$  为场点到  $d\Gamma$  的距离,  $r_S$  是源点到场点的距离,  $\theta$  是  $r$  和边界  $d\Gamma$  法向的夹角.

对于边界元法, 场点位于边界上, 有  $c=2$ . 根据静电比拟<sup>[3]</sup>, 将(1)式中的  $\iiint_{\Omega} \frac{\rho}{4\pi\epsilon r_S} d\Omega$  用

2002-04-19 收稿, 2002-06-28 收修改稿

\* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 59937160)

E-mail: wangyuanqiao99@mails.tsinghua.edu.cn

$\iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_S}{4\pi\sigma r_S^2} d\Omega$  替代可得到在电导率为  $\sigma$  的无限大均匀导电媒质中, 电流偶极子源  $\mathbf{J}$  在  $M_0$  点产生的电位, 表达式为

$$\frac{1}{2} \varphi(M_0) = \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_S}{4\pi\sigma r_S^2} d\Omega + \oint_{\Gamma} \varphi(M) \frac{1}{4\pi r^2} \cos\theta d\Gamma + \oint_{\Gamma} \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial\varphi(M)}{\partial n} d\Gamma. \quad (2)$$

媒质分界面上的界面条件可以表示为

$$\begin{cases} \varphi^+ = \varphi^- \\ \sigma^+ \frac{\partial\varphi^+}{\partial n} = \sigma^- \frac{\partial\varphi^-}{\partial n}, \quad (\text{电流法向连续条件}) \end{cases}$$

式中  $\sigma^-$  和  $\sigma^+$  分别为分界面内外侧的电导率,  $\varphi^-$  和  $\varphi^+$  代表分界面内外侧的电位.

### 1.2 正问题算法

设一单层球模型(如图1所示), 已知边界  $\Gamma$  的电位法向导数为零, 偶极子源  $\mathbf{J}$  位于区域  $\Omega$  中, 求解边界  $\Gamma$  上的电位分布.

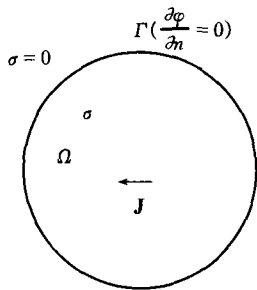


图1 单层球模型

首先将边界  $\Gamma$  剖分为  $N$  个节点的三角形边界元网格, 将(2)式进行离散可得到  $N$  个方程, 即边界元方程, 写成矩阵形式为

$$\mathbf{A}\varphi = \mathbf{B},$$

式中  $\varphi$  为节点上的电位列向量. 当场点与源点为同一节点时, 将出现奇异积分, 本文采用直角坐标向极坐标转换的方法消除了该奇异性<sup>[4]</sup>.

由于形成的矩阵  $\mathbf{A}$  为奇异矩阵<sup>[5,6]</sup>, 因此在求解方程组时需要选定某一节点为电位参考点, 将该节点的电位设为已知, 然后将方程组进行适当的变化可得到一个系数矩阵非奇异的方程组, 求解所形成的线性方程组即可得到边界  $\Gamma$  上的电位分布.

对于  $m$  层球模型, 每层边界面分别剖分为  $N_i (i=1, 2, \dots, m)$  个节点, 如图2所示. 分别对每种媒质区域的边界面列写电位方程式, 可得到  $N_1 + 2(N_2 + N_3 + \dots + N_m)$  个方程, 其中  $N_1$  是外边界面上的节点数(已知外边界上电位的法向导数为零), 对于内部边界面上该法向导数亦为待求量. 同时在分界面上施加电流法向连续界面条件可得到另外  $(N_2 + N_3 + \dots + N_m)$  个方程. 这样对于  $m$  层球模型中未知量个数为  $(N_1 + 3N_2 + 3N_3 + \dots + 3N_m)$ , 可以列写  $(N_1 + 3N_2 + 3N_3 + \dots + 3N_m)$  个方程, 形成的系数矩阵亦为奇异矩阵, 因此可以采用设定参考电位的方法求解. 但是此时形成的系数矩阵性质较差, 并且随着各层电阻率变化的加剧其性质变得更差, 采用设定参考电位后得到的系数矩阵条件数很大, 利用一般的线性方程求解方法则计算结果误差较大. 在本文中对于多层球模型正问题的求解采用了广义逆求解, 得到的计算结果精度较高.

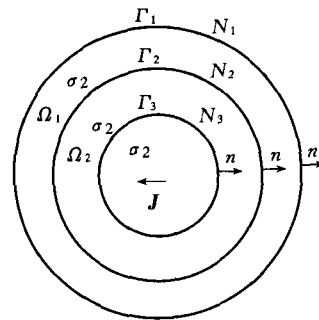


图2 多层球模型

### 1.3 高分辨脑电算法

如图2所示的球模型, 已知边界  $\Gamma_1$  的电位分布以及电位法向导数(其值为零), 并且区域  $\Omega_1$  为无源区域, 现求解分界面  $\Gamma_2$  上的电位分布.

根据文献[7]给出的证明, 在图2所示的高分辨脑电问题中, 给定边界  $\Gamma_1$  的电位分布以及电位法向导数, 若区域  $\Omega_1$  为无源区域, 则满足边界条件的解答是惟一的.

在图2的模型中, 在无源区域  $\Omega_1$  中应用(2)式, 注意到式中与电流偶极子源体积分有关的一项为零, 其简化为

$$\frac{1}{2} \varphi(M_0) = \oint_{\Gamma_1+\Gamma_2} \varphi(M) \frac{1}{4\pi r^2} \cos\theta d\Gamma + \oint_{\Gamma_1+\Gamma_2} \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial\varphi(M)}{\partial n} d\Gamma. \quad (3)$$

由于边界  $\Gamma_1$  上的电位法向导数为零(各边界面法向如图所示), 则(3)式可以化为

$$\frac{1}{2} \varphi(M_0) = \iint_{\Gamma_1} \varphi(M) \frac{1}{4\pi r^2} \cos\theta d\Gamma - \iint_{\Gamma_2} \varphi(M) \frac{1}{4\pi r^2} \cos\theta d\Gamma - \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} d\Gamma. \quad (4)$$

在边界  $\Gamma_1, \Gamma_2$  上分别剖分  $N_1, N_2$  个节点, 将(4)式离散可以得到  $N_1 + N_2$  个方程, 写成矩阵形式如下[8,9]

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{12} \varphi_2 + \mathbf{G}_{12} \varphi_2^* = -\mathbf{P}_{11} \varphi_1 \\ \mathbf{P}_{22} \varphi_2 + \mathbf{G}_{22} \varphi_2^* = -\mathbf{P}_{21} \varphi_1 \end{cases} \quad (5)$$

(对应场点在  $\Gamma_1$  上)

(对应场点在  $\Gamma_2$  上),

其中  $\varphi_1$  为边界  $\Gamma_1$  剖分节点上的电位列向量, 其值已知;  $\varphi_2, \varphi_2^*$  为  $\Gamma_2$  外侧的电位和电位法向导数, 为待求量.  $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22}, \mathbf{G}_{12}, \mathbf{G}_{22}$  为对应的系数矩阵.

考虑边界  $\Gamma_1, \Gamma_2$  上剖分的节点数, 若  $N_1 > N_2$ , (5)式所示方程为超定方程; 若  $N_1 < N_2$ , 其为欠定方程; 当  $N_1 = N_2$  时, 方程有确切解, 可求出边界  $\Gamma_2$  外侧的电位和电位法向导数, 本文中各层边界面上的剖分数目均相同.

类似地, 在无源区域  $\Omega_2$  中应用(3)式, 可得到求解边界  $\Gamma_3$  上的电位与电位法向导数的方程组, 与(5)式相比, 方程组右端多出  $\Gamma_2$  内侧电位法向导数一项; 此时  $\Gamma_2$  内侧的电位和电位法向导数可以利用边界条件  $\varphi'_2 = \varphi_2$  及  $\sigma_1 \varphi_2 = \sigma_2^* \varphi_2^*$ , 由针对区域  $\Omega_1$  的解获得.

## 2 计算结果及分析比较

设一头模型为3层同心球模型, 半径分别为7.5, 7.0, 6.5 cm, 电流偶极子源的偶极矩为1.0 A·mm, 位于  $x$  轴上, 方向为  $x$  轴的正方向. 以下分析中, 电位分布曲线指赤道线的半圆周 ABC (如图3)上各点的电位, 其中相对误差  $\Delta$  定义为

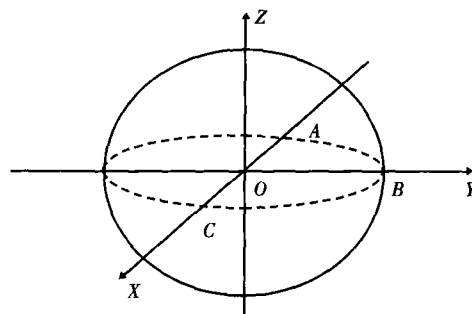


图3 实际计算模型

$$\Delta = \left| \frac{\varphi_{\text{num}} - \varphi_{\text{ana}}}{\varphi_{\text{max}} - \varphi_{\text{min}}} \right| \times 100\%$$

$\varphi_{\text{num}}$ 是电位的数值解,  $\varphi_{\text{ana}}$ 是电位的解析解,  $\varphi_{\text{max}}$ 是解析解电位的最大值,  $\varphi_{\text{min}}$ 是解析解电位的最小值.

### 2.1 正问题

偶极子位于  $x$  轴 2.0 cm 处, 3层媒质电导率由外至里分别为 0.33, 0.0042, 0.33 S/m, 各层边界面上的剖分节点数均为 440, 单元数目为 876. 图4为3个边界面赤道上的电位分布与解析解的比较(解析解表达式请参阅文献[10]), 相对误差曲线如图5所示.

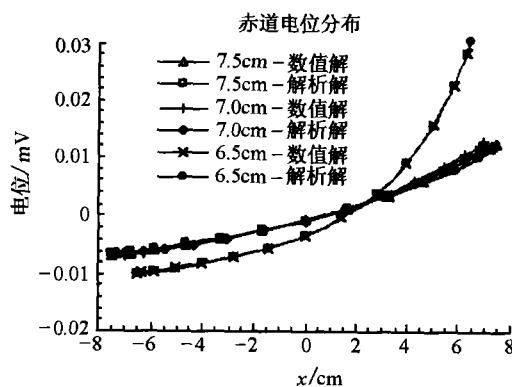


图4 偶极子位于2cm处的赤道电位分布

计算中发现, 在利用边界元求解脑电正问题时, 数值解的精度受到各层媒质电导率的影响, 当相邻两层媒质的电导率差异较大时, 边界元的求解精度降低; 同时随着偶极子的偏心, 由于偶极子靠近边界从而导致矩阵系数计算的误差随之偏大(临界奇异积分), 因此各层分界面电位的计算结果精度降低.

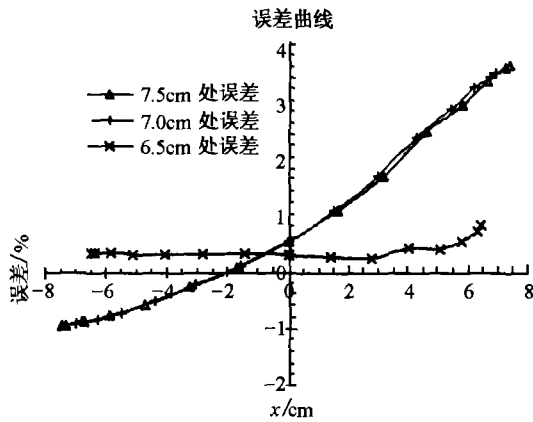


图5 偶极子位于2 cm处的计算误差曲线

对于单层球模型来说, 系数矩阵是严格奇异的, 在求解过程中采用了设定参考电位的方法; 但是在多层球模型中, 若采用设电位参考点的方法, 则得到的系数矩阵性质较差, 故利用一般的求解线性方程组的算法(如 Gauss 列主元消去法)计算误差较大(最大误差大于 10%); 本文中采用了广义逆求解线性方程组所得计算结果的误差较小.

当各层媒质电导率从外至里分别为 0.33, 0.1, 0.33 S/m, 偶极子位于 2, 5 cm 时, 最大误差分别为 1.0%, 4.4%; 当各层媒质电导率从外至里分别为 0.33, 0.0042, 0.33 S/m, 偶极子位于 2, 5 cm 时, 最大误差分别为 3.6%, 4.8%.

### 2.2 高分辨脑电

偶极子位于  $x$  轴 2.0 cm 处, 3 层媒质电导率由外至里分别为 0.33, 0.0042, 0.33 S/m, 各层边界面上的剖分节点数均为 440, 单元数目为 876, 根据正问题数值计算以及解析解计算得到的 7.5 cm 处表面的电位分布反推 7.0 cm 和 6.5 cm 界面上的电位. 图 6 为各边界面上赤道上的电位分布, 相对误差曲线如图 7 所示.

从仿真计算结果可以看出, 根据正问题数值解的头皮电位分布反推得到皮层电位误差较小 ( $<1\%$ ), 而根据解析解的头皮电位分布反推的皮层电位误差相对较大 ( $<5\%$ ). 另外在头皮最大电位点上人为增加一个噪声(幅值为最大电位的 10%), 反推到颅骨层的电位没有发生太大变化, 但是得到的皮层电位分布发生较大变化. 分析其原因, 由于颅骨的低通滤波作用对皮层到头皮的信号起到了“平滑”的作用, 对应于高分辨脑电问题来说, 颅骨

低电导率的作用则是放大了头皮表面电位的误差, 因此计算得到的皮层电位误差较大.

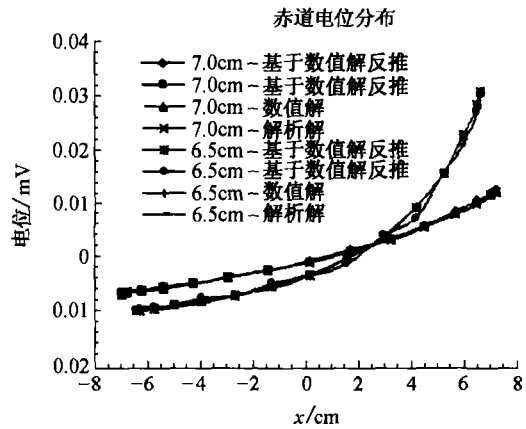


图6 偶极子位于2 cm处反推赤道电位分布

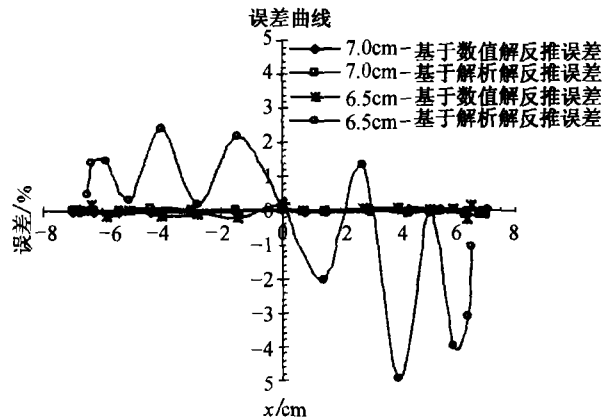


图7 偶极子位于2 cm处反推的误差曲线

利用偶极子电流源位于不同位置得到的头皮电位的正问题结果反推皮层电位, 计算结果表明, 偶极子电流源越靠近边界, 逆问题的计算误差越大; 颅骨层的电导率大小也影响高分辨脑电的计算精度, 当 3 层媒质的电导率变化比较剧烈时, 所得皮层电位的相对误差较大.

以上通过球模型的解析解对正问题和高分辨脑电进行了验证, 结果表明, 在偶极子距边界(皮层)的距离大于皮层半径的 25%, 颅骨电导率不大于其他区域上的电导率 80 倍时, 在一定的网格数量下, 计算误差小于 5%. 对于真正的头模型, 主要工作是网格剖分, 只要能形成正确的边界元网格, 则计算球模型的软件可以直接用于真实头模型. 图 8 为一个真实头模型的网格剖分实例.

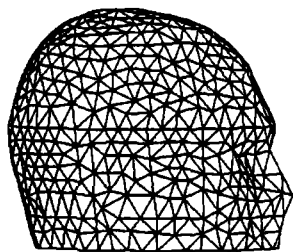


图8 真实头模型

### 3 结论

(1) 从正问题计算结果可以看出, 采用广义逆求解线性方程组的方法, 可以克服由于相邻子区域电导率相差较大而造成的系数矩阵质量差, 从而影响边界元法的求解精度问题.

(2) 从高分辨脑电的计算结果可以看出, 在信噪比较高的情况下, 边界元法计算得到的皮层电位精度很高; 但是存在测量误差或噪声时, 由于颅骨低电导率的影响, 头皮电位的测量误差或噪声经过颅骨的放大作用, 在皮层上误差增大, 因此在利用边界元法计算皮层电位时需要对头皮电位进行一定的去噪等预处理, 以提高计算精度.

(3) 利用边界元法可以比较容易地实现网格剖分, 求解形状较复杂的实际问题.

### 参 考 文 献

- 1 Robert D S. A method for simulating intracerebral potential fields: The cortical imaging technique. *Journal of Clinical Neurophysiology*, 1991, 8(4): 432
- 2 He B, et al. Body surface Laplacian ECG mapping. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1992, 39(11): 1179
- 3 马信山, 等. 电磁场基础. 北京: 清华大学出版社, 1994
- 4 Telles J C F. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(5): 959
- 5 Brebbia C A. *Boundary Elements: An Introductory Course*. South Ampton: Computational Mechanics Pul, 1989
- 6 盛剑霓. 工程电磁场数值分析. 陕西: 西安交通大学出版社, 1991
- 7 Yamashita Y, et al. Use of the finite element method to determine epicardial from body surface potentials under a realistic torso model. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1984, 31(9): 611
- 8 Richard Srebro, et al. Estimating regional brain activity from evoked potential fields on the scalp. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1993, 40(6): 509
- 9 He B, et al. Estimating cortical potentials from scalp EEG' sin a realistically shaped inhomogeneous head model by means of the boundary element method. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1999, 46(10): 1264
- 10 Zhou H, et al. Computation of the Potential distribution in a four-layer anisotropic concentric spherical volume conductor. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1992, 39(2): 154